**Tentamen Vectoranalyse, 5 juli 2010.**

Het tentamen bestaat uit de onderstaande **vier** opgaven. Bij elk van de opgaven is het maximale aantal voor deze opgave te behalen punten vermeld. Je krijgt 10 punten gratis.

**Opgave 1 (20 pt.)**
Het oppervlak $S$ is gegeven door de vergelijking $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

1. Toon aan dat het raakvlak aan $S$ in het punt $(x_0, y_0, z_0)$ gegeven wordt door $x_0 x + y_0 y + z_0 z = 3$.

2. Laat $C$ de snijkromme zijn van $S$ en het vlak $V$ met vergelijking $x+y-2z = 0$. Bereken het snijpunt van de raaklijn aan $C$ in $p = (1, 1, 1)$ met het $xz$-vlak.

   *Hint:* de raaklijn aan $C$ in het punt $p$ is de snijlijn van $V$ met het raakvlak in $p$ aan $S$.

**Opgave 2 (20 pt.)**
Gegeven is de functie $f(x, y, z) = x + yz$ op het boloppervlak met vergelijking

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

1. Bepaal de kandidaat-extrema van $f$ op het boloppervlak.

2. Bepaal de aard (maximum, minimum, zadelpunt) van deze extrema.

**Opgave 3 (25 pt.)**
Op $\mathbb{R}^3$ is het vectorveld $\mathbf{F}$ gegeven door

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (-4x - 3y + az)\,\mathbf{i} + (bx + 3y + 5z)\,\mathbf{j} + (4x + cy + 3z)\,\mathbf{k}.$$

1. Verder zijn gegeven de punten $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 0, 0)$, $C = (1, 1, 0)$ en $D = (1, 1, 1)$. Het pad $\gamma$ bestaat uit de lijnsegmenten $AB$, $BC$ en $CD$. Bereken

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

2. Bepaal $a$, $b$ en $c$ zó dat het vectorveld $\mathbf{F}$ conservatief is.

3. Bepaal voor de onder 2 gevonden waarden van $a$, $b$ en $c$ een potentiaalfunctie van $\mathbf{F}$.

4. Laat zien dat de potentiaalfunctie uit onderdeel 3 gebruikt kan worden om de waarde van de padintegraal in onderdeel 1 uit te rekenen in het geval $\mathbf{F}$ conservatief is.

**Z.O.Z.**

**Opgave 4 (25 pt.)**
Op $\mathbb{R}^3$ is gegeven de functie $f(x, y, z) = ax^4 + by^4 + cz^4$, waarbij $a$, $b$ en $c$ reële constanten zijn. De eenheidsbol $D$ is gegeven door $D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

1. Toon aan dat
$$\iiint_D \nabla^2 f \, dV = 4 \iint_{\partial D} f \, dS.$$
Hierbij is $\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f$ de Laplaciaan van $f$.

2. Bewijs dat
$$\iint_{\partial D} f \, dS = \frac{4\pi}{5}(a + b + c).$$

# Uitwerking

**Opgave 1 (10+10 pt).**
1. Laat $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3$, dan staat de gradient van $f$ in $\mathbf{a} = (x_0, y_0, z_0)$ loodrecht op het raakvlak $V$ in dat punt aan $S$. Een vergelijking van $V$ is dus

$$0 = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) = 2x_0\,(x - x_0) + 2y_0\,(y - y_0) + 2z_0\,(z - z_0).$$

Omdat $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 3$, volgt hieruit de gevraagde vergelijking.

2. Een normaal op het vlak is de vector $\mathbf{n} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$. Een raakvector van $C$ in $\mathbf{p} = (1,1,1)$ is

$$\mathbf{v} = \nabla f(\mathbf{p}) \times \mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -6\,\mathbf{i} + 6\,\mathbf{j}.$$

Een parametrisering van de raaklijn is

$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{p} + t\,\mathbf{v} = (1 - 6t, 1 + 6t, 1),$$

dus het snijpunt van deze lijn met het vlak $y = 0$ is $\mathbf{c}(-\frac{1}{6}) = (2, 0, 1)$.

*Alternatieve methode:* we moeten het volgende stelsel vergelijkingen oplossen:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ x + y - 2z &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

De oplossing is $(x,y,z) = (2,0,1)$.

**Opgave 2 (13+7 pt).**
1. Een kandidaat extreem $\mathbf{a}$ vinden we door $(\mathbf{a}, \lambda)$ op te lossen uit

$$\begin{cases} \nabla f(\mathbf{a}) & = \lambda\,\nabla g(\mathbf{a}), \\ g(\mathbf{a}) & = 0. \end{cases}$$

Stellen we $\mathbf{a} = (x,y,z)$, dan wordt dit stelsel

$$1 = 2\,\lambda x \qquad (1)$$
$$z = 2\,\lambda y \qquad (2)$$
$$y = 2\,\lambda z \qquad (3)$$
$$1 = x^2 + y^2 + z^2 \qquad (4)$$

Uit (1) volgt $\lambda \neq 0$, en $x = \frac{1}{2\lambda}$. Vergelijkingen (2) en (3) zijn samen equivalent met

$$y(1 - 4\lambda^2) = 1 \qquad (5)$$
$$z(1 - 4\lambda^2) = 1 \qquad (6)$$

Stel $4\lambda^2 - 1 \neq 0$. Dan volgt uit (5) dat $y = 0$, en uit (6) dat $z = 0$. Dit invullen in (4) geeft $x = \pm 1$, dus, m.b.v. (1) volgt $2\lambda = \mp 1$, in tegenspraak met de aanname.

Dus geldt: $4\lambda^2 - 1 = 0$, dus $2\lambda = \pm 1$ en dus $x = \mp 1$. Invullen in (4) geeft dan $y^2 + z^2 = 0$, dus $y = z = 0$. De kandidaat-extrema zijn dus $p_\pm = (\pm 1, 0, 0)$.

2. Volgens de stelling van Weierstraß neemt $f$ zijn minimum en maximum aan op het boloppervlak, omdat dit gesloten en begrensd (compact) is. Deze extrema worden aangenomen in een kritiek punt, die dus tot een van de twee in onderdeel 1 gevonden punten behoren. Omdat $f(p_\pm) = \pm 1$, volgt dat $p_+$ een globaal maximum en $p_-$ een globaal minimum is van $f$ op het boloppervlak.

**Opgave 3 (7+6+6+6 pt).**
1. Een parametrisering van het segment $AB$ is $\mathbf{x}_1(t) = (t, 0, 0) = t\,\mathbf{i}$, met $0 \leq t \leq 1$. Dus geldt

$$\int_{AB} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{t=0}^{1} \mathbf{F}(t,0,0) \cdot \mathbf{x}_1'(t) dt = \int_{t=0}^{1} \mathbf{F}(t,0,0) \cdot \mathbf{i}\, dt = \int_{t=0}^{1} -4t dt = -2.$$

Met de parametriseringen $\mathbf{x}_2(t) = \mathbf{i} + t\,\mathbf{j}$ en $\mathbf{x}_3(t) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$ van $BC$ resp. $CD$ krijgen we op dezelfde manier $\int_{BC} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = b + \frac{3}{2}$ en $\int_{CD} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \frac{11}{2} + c$. Dus:

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = b + c + 5.$$

2. Eenvoudig is uit te rekenen dat $\nabla \times \mathbf{F} = (c-5)\,\mathbf{i} + (a-4)\,\mathbf{j} + (b+3)\,\mathbf{k}$. Dus het vectorveld is conservatief d.e.s.d. als $a = 4$, $b = -3$ en $c = 5$.

3. We moeten een functie $f$ op $\mathbb{R}^3$ bepalen die voldoet aan $\mathbf{F} = \nabla f$. Dus

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -4x - 3y + 4z \tag{7}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -3x + 3y + 5z, \tag{8}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 4x + 5y + 3z. \tag{9}$$

Uit (7) volgt

$$f(x,y,z) = -2x^2 - 3xy + 4xz + g(y,z),$$

Hieruit volgt, onder gebruik making van (8) en (9):

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + 3x = 3y + 5z, \tag{10}$$

$$\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z} - 4x = 5y + 3z. \tag{11}$$

Uit (10) volgt:

$$g(y,z) = \tfrac{3}{2}y^2 + 5yz + h(z).$$

Hieruit volgt, onder gebruik making van (11):

$$h'(z) = \frac{\partial g}{\partial z} - 5y = 3z,$$

en dus $h(z) = \frac{3}{2}z^2 + d$, waarbij $d$ een willekeurige constante is. Combineren van de uitdrukkingen voor $f$, $g$ en $h$ levert

$$f(x,y,z) = -2x^2 - 3xy + 4xz + \tfrac{3}{2}y^2 + 5yz + \tfrac{3}{2}z^2 + d.$$

4. Voor de onder 2 gevonden waarden van $a$, $b$ en $c$ geldt dus

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = f(1,1,1) - f(0,0,0) = 7.$$

Dit komt overeen met het onder 1 gevonden resultaat als $b = -3$ en $c = 5$.

**Opmerking.** Een alternatieve aanpak voor onderdeel 3 is gebaseerd op de constatering dat de integraal van het vectorveld over een pad gelijk is aan het verschil van de potentialen in begin- en eindpunt van dat pad, dus

$$f(x,y,z) - f(0,0,0) = \int_C (-4x-3y+4z)\,dx + (-3x+3y+5z)\,dy + (4x+5y+3z)\,dz,$$

waarbij $C$ een willekeurig pad is van $(0,0,0)$ naar $(x,y,z)$. Nemen we voor $C$ het pad bestaande uit de polygonale lijn met hoekpunten $(0,0,0)$, $(x,0,0)$, $(x,y,0)$ en $(x,y,z)$, en stellen de $f(0,0,0) = d$, dan krijgen we:

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \int_0^x -4u\,du + \int_0^y (-4x-3u)\,du + \int_0^z (4x+5y+3u)\,du \\ &= -2x^2 - 3xy + \tfrac{3}{2}y^2 + 4xz + 5yz + \tfrac{3}{2}z^2 + d. \end{aligned}$$

**Opgave 4 (10+15 pt).**

1. Volgens de integraalstelling van Gauß (ook wel: de divergentiestelling) geldt

$$\iiint_D \nabla\cdot\nabla f\,dV = \iint_{\partial D} \nabla f\cdot\mathbf{n}\,dS,$$

waarbij $\mathbf{n}$ de eenheidsnormaal op $\partial D$ is, dus $\mathbf{n} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$. Maar $\nabla f\cdot\mathbf{n} = 4f$, omdat $\nabla f = 4(ax^3\,\mathbf{i} + by^3\,\mathbf{j} + cz^3\,\mathbf{k})$.

2. Merk op dat $\nabla^2 f = 12\,(ax^2 + by^2 + cz^2)$. Volgens onderdeel 1 geldt dus

$$\iint_{\partial D} f\,dS = 3\iiint_D (ax^2 + by^2 + cz^2)\,dV.$$

Op grond van symmetrie van $D$ geldt: $\iiint_D x^2\,dV = \iiint_D y^2\,dV = \iiint_D z^2\,dV$, en dus

$$\iiint_D x^2\,dV = \iiint_D y^2\,dV = \iiint_D z^2\,dV = \frac{1}{3}\iiint_D r^2\,dV.$$

Hieruit volgt

$$\iint_{\partial D} f\,dS = (a+b+c)\iiint_D r^2\,dV.$$

Om de volume-integraal in het rechterlid uit te rekenen gaan we over op bolcoördinaten $r$, $\varphi$, $\vartheta$, dus

$$\begin{cases} x &= r\sin\varphi\cos\vartheta, \\ y &= r\sin\varphi\sin\vartheta, \\ z &= r\cos\varphi, \end{cases}$$

met $0 \le r \le 1$, $0 \le \varphi \le \pi$ en $0 \le \vartheta \le 2\pi$. Dan geldt

$$dV = r^2\sin\varphi\,drd\varphi d\vartheta,$$

en dus

$$\iiint_D r^2\,dV = \int_{\vartheta=0}^{2\pi}\int_{\varphi=0}^{\pi}\int_{r=0}^{1} r^4\sin\varphi\,drd\varphi d\vartheta = \frac{4\pi}{5}.$$

**Opmerking:** natuurlijk kan $\iiint_D x^2\,dV$ ook direct berekend worden:

$$\begin{aligned}
\iiint_D x^2\,dV &= \int_{\vartheta=0}^{2\pi}\int_{\varphi=0}^{\pi}\int_{r=0}^{1} r^4\sin^3\varphi\cos^2\vartheta\,drd\varphi d\vartheta \\
&= \left(\int_{\vartheta=0}^{2\pi}\cos^2\vartheta\,d\vartheta\right)\left(\int_{\varphi=0}^{\pi}\sin^3\varphi\,d\varphi\right)\left(\int_{r=0}^{1} r^4 dr\right) \\
&= \pi\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{5} \\
&= \frac{4\pi}{15}.
\end{aligned}$$

Op analoge manier berekenen we $\iiint_D y^2\,dV$ en $\iiint_D z^2\,dV$.